

MODELIZACIÓN MATEMÁTICA EN PSICOLOGÍA: UN RECORRIDO HISTÓRICO HASTA NUESTROS DÍAS

MARCOS RUIZ SOLER y MANUEL PELEGRINA DEL RÍO
Universidad de Málaga

RESUMEN

La elaboración de explicaciones sobre fenómenos comportamentales en forma de modelos matemáticos posee ya una dilatada historia dentro de la psicología. Sin embargo, no todos los modelos forman un grupo homogéneo, sino más bien distintos grupos que reflejan, en cierto modo, algunos de los supuestos implícitos que los sustentan. En este sentido, ofrecemos un rápido recorrido histórico de los modelos agrupados bajo tres conjuntos que hemos dado en llamar algebraicos, algorítmicos y estadísticos. Los *modelos algebraicos* serían aquellos que Intentan capturar formalmente alguna relación funcional entre variables (ejemplo prototípico de ello serían los modelos psicofísicos y numerosos modelos de aprendizaje). Los *modelos algorítmicos* serían modelos igualmente formalizables según los principios de la teoría matemática de la computabilidad, pero normalmente expresados en algún lenguaje de ordenador (ejemplo característico de ello sería gran número de modelos sobre procesos cognitivos). Y, por último, los *modelos estadísticos* serían aquellos que tratan de explicar el valor de una variable dependiente o criterio como la suma de una serie de componentes representativos de distintos efectos. Todos los modelos citados coexisten en la actualidad; pero la preponderancia de unos sobre otros en determinados periodos históricos puede resultar de utilidad para la comprensión del modo en que se han investigado los hechos y fenómenos del comportamiento y la cognición.

EL PAPEL DE LOS MODELOS EN LA HISTORIA DE LA PSICOLOGÍA

Los modelos han sido definidos como "formulaciones teóricas, ya sean matemáticas, lógicas o implementadas mediante ordenador, que permiten cálculos exactos" (Estes, 1993, p. 4). De ellos se ha servido en abundancia la ciencia psicológica desde hace décadas para evaluar o explicar fenómenos comportamentales. Pero de todos ellos nuestro interés va a centrarse en un importante subgrupo: el de los modelos matemáticos.

En este trabajo presentamos una clasificación que podría calificarse más de "longitudinal" que "transversal", en tanto en cuanto que mediante la misma, se pretende agrupar a los modelos más por su cercanía dentro de un periodo de la historia de la psicología que por sus particulares características estructurales. No obstante, veremos que entre ambas dimensiones -longitudinal y estructural- no existe una completa independencia, sino más bien una sospechosa correlación que nos ha llevado a la hipótesis principal de este trabajo, a saber: la existencia de ciertas concepciones sobre los fenómenos psicológicos que pueden desvelarse examinando las orientaciones del propio proceso de modelización.

En consecuencia, vamos a presentar algunas de las principales características de cada uno de tales grupos de modelos matemáticos para, seguidamente, señalar algu-

nas de las ideas imperantes del quehacer científico de la época donde tales modelos cobraron un mayor protagonismo.

MODELOS ALGEBRAICOS: EL COMPORTAMIENTO COMO CONJUNTO DE ECUACIONES FUNCIONALES

Nuestra concepción de modelos matemáticos posee una acepción amplia, donde veremos que cabe ubicar modelos del comportamiento humano distintos a los que tradicionalmente se han considerado con el epíteto de "matemáticos". Para estos últimos -los modelos matemáticos "tradicionales"- hemos reservado el término de algebraicos, dado que suelen formularse mediante alguna expresión matemática formalizada algebraicamente.

Cabe aquí encontrar modelos referidos a numerosas áreas, pero especialmente a aprendizaje, percepción, memoria y decisión. Sin embargo, y pese a lo que en un principio podría parecer por la propia naturaleza de los fenómenos investigados, el estudio de estos procesos se realizó desde un enfoque de "caja negra", esto es, fijándose en las propiedades generales exhibidas por el sistema y no en la estructura interna que era capaz de generar dichas propiedades (esta distinción ha dado lugar a una clasificación de modelos fenomenológicos vs. procesuales; vg. Luce, 1995).

Entre los modelos algebraicos se incluyen aquellos que inicialmente intentaron representar funciones psicofísicas. Se considera a Fechner (1890) como el primer autor que inició este trabajo. Fechner -y en general la denominada *psicofísica clásica*- intentó establecer relaciones funcionales entre sensación y percepción. Los métodos se caracterizan por presentar un "continuum" entre la escala de estimulación y la escala de sensación percibida. Para Fechner la sensación es un función lineal del nivel de estimulación siempre y cuando presentemos la estimulación en una escala logarítmica. Para Weber el *umbral diferencial* (es decir, el cambio necesario en el estímulo para advertir por parte del sujeto una diferencia en la sensación) viene representado por una relación proporcional entre nivel del estímulo y nivel de sensación. Los métodos de la psicofísica clásica se caracterizan por utilizar en la obtención de sus medidas la *técnica de las diferencias apenas perceptibles*. Esta es una técnica propia de los denominados *métodos indirectos*. En la psicofísica moderna -en gran parte ejemplificada por los trabajos de Stevens (1951, 1975)- se utilizan los llamados *métodos directos*. Mediante estos métodos se obtienen medidas preguntando a los sujetos sobre cuestiones relativas a la magnitud, categoría o ajuste entre dos tipos de sensaciones.

Han sido numerosas las críticas a los métodos de Stevens, entre ellas que los sistemas sensoriales humanos no representan siempre escalas apropiadas de medida, sino que más bien son variables entre situaciones y entre sujetos. En dichas sensaciones no sólo influye la sensibilidad sino otros factores psicológicos (véase a este respecto Myers, 1982). No obstante, aún en la actualidad se continúan utilizando métodos psicofísicos en las exploraciones clínicas sensoriales, en psicología medioambiental y ecológica para valorar espacios determinados y en psicología del marketing en la apreciación del gusto y calidad de los productos (ejemplos de ello pueden encontrarse en Ponsoda, 1986).

Un segundo nivel se refiere al *escalamiento unidimensional* de objetos mediante técnicas como las comparaciones binarias sucesivas, las cuales permiten elaborar una escala en la que el valor de un objeto o categoría viene determinado por la cantidad de veces que se ha elegido con preferencia a otro/s en una serie de comparaciones binarias. El autor más representativo de ello es probablemente Thurstone (1927). Para este autor, el valor de una categoría puede variar a lo largo de las presentaciones y este es un aspecto del modelo empleado que influirá en otros posteriores. Entre sus aplicaciones podemos considerar la elaboración de categorías ya no tan sólo físicas sino también psicológicas así como la fundamentación de los factores de inteligencia en oposición a un sólo factor (Spearman, 1904). En esta línea Shepard (1958) establece relaciones funcionales entre estímulos psicológicos (distancia psicológica) más que físicos. Todo lo anterior, como indica Estes (1993), influiría notablemente en la base y fundamento de las *escalas psicológicas de medida* (Krantz, Luce, Suppes y Tversky, 1971).

La aparición de la *teoría de detección de señales* (TDS) incorporaría un nuevo e importante parámetro además del de sensibilidad (d'): el criterio de decisión (b) del propio sujeto. Ambos aspectos se han considerado independiente entre sí (Green y Swets, 1966) y su inclusión representa un destacado avance en relación al enfoque psicofísico clásico y al escalamiento de Thurstone, ya que separa *criterio de decisión* y *sensibilidad*, lo que permite su aplicabilidad en psicología cognitiva (Pelegrina, 1988). En cuanto a los últimos avances dentro de este grupo de modelos, y en particular con características análogas a la TDS, se encuentra el *modelo de elección* de Luce (1959) y el *modelo de umbral alto* de Blackwell (1963); pese a tener cada uno de ellos una fundamentación teórica diferente. Una vez que el criterio de decisión entra a formar parte de la psicofísica moderna comenzamos una etapa en la que estos modelos ilustran procesos cognitivos como discriminación, identificación, etc. Ello, juntamente con la teoría de la información, permitiría incorporar desde la modelización matemática variables situadas entre el estímulo y la respuesta (Posner, 1978).

Por último, cabe señalar dentro de este grupo de modelos los importantes esfuerzos de formalización matemática realizados desde el paradigma conductista. Los trabajos de Hull (1951) son un claro exponente del intento de realizar una psicología desde un *enfoque axiomático* desde el cual poder derivar sintácticamente nuevas conclusiones al estilo de otras ciencias más consolidadas. Sin embargo, y pese a que sus esfuerzos no se vieron recompensados con modelos que reprodujesen convenientemente los fenómenos de aprendizaje estudiados, su influencia permanecería en desarrollos posteriores, de los cuales constituyen un destacado ejemplo los modelos de memoria asociativa (Anderson y Bower, 1973).

MODELOS ALGORÍTMICOS: EL COMPORTAMIENTO COMO PROCESO COMPUTABLE

En los años cincuenta y especialmente en los sesenta las fronteras del paradigma conductista fueron traspasadas por quienes se dedicaron al estudio de fenómenos psicológicos concernientes al interior de la caja negra y que, inicialmente, no fueron del todo bien vistos. Esto conllevó un importante cambio de orientación en el propio proceso de investigación, dado que el énfasis se trasladaba del minucioso exa-

men entre variables de entrada y salida (estudiar qué sucedía) al examen de las transformaciones que se operaban entre esa entrada y salida (estudiar por qué sucedía).

Los modelos pertenecientes a esta nueva orientación se han conocido comúnmente como *modelos de procesamiento de información* (PI), es decir, modelos en los que se especificaba un algoritmo que, tal y como es sabido, no es más que "un procedimiento general con el que se obtiene la respuesta a todo problema apropiado mediante un simple cálculo de acuerdo con un método específico" (Hermes, 1969, p. 19).

Mucho es lo que se ha hablado sobre los modelos de PI, sobre sus relaciones con la teoría de la información (Attneave, 1959) y de la comunicación de Shannon (1948), con la metáfora del ordenador y demás, pero muy poco sobre las ideas de modelización matemática subyacentes a esta concepción. Y es que tras los modelos de PI se encuentra omnipresente el concepto de *algoritmo* (de ahí precisamente nuestra denominación de "modelos algorítmicos") cuyo fundamento se encuentra en la *teoría matemática de la computabilidad* (formalmente elaborada por lógicos matemáticos como Gödel, Turing, Post, Church y Kleene).

Entre los esfuerzos más importantes de elaboración de modelos algorítmicos cabe destacar el famoso programa GPS de Newell y Simon (1972), aunque sin olvidar otros igualmente relevantes como los de Atkinson y Shiffrin (1968), Feigenbaum (1963), Hunt (1962), Newell, Shaw y Simon (1958), Norman y Rumelhart (1970), etc. Mediante todos ellos lo que se intentaba, en definitiva, era dar cuenta de una salida (la conducta, en sentido amplio) como resultado de una serie de operaciones y procesos ocurridos dentro de la hasta entonces "caja negra" ayudándose del socorrido concepto de *símbolo* que, con su doble cara de forma y contenido, daba aparentemente solución a las cuestiones sintácticas y semánticas del PI.

Desde un enfoque ligeramente distinto -por ser menos cognitivo- pero igualmente *computacional* se encuentran los estudios sobre la visión humana de David Marr (1982), quien impulsó el estudio de los procesos perceptuales fijándose fundamentalmente en la tarea de procesamiento que debía resolver el sistema antes que en el modo particular en que tales procesos eran implementados. Asimismo cabe destacar durante estos últimos años la proliferación de los *modelos de redes neuronales artificiales*, de creciente expansión en la psicología cognitiva, que comparten las características de los modelos algorítmicos y pueden contemplarse -"latu sensu"- como modelos matemáticos de la dinámica de procesos basados en el cálculo matricial.

MODELOS ESTADÍSTICOS: EL COMPORTAMIENTO COMO DATO ANALÍTICAMENTE DESCOMPONIBLE

Los serios esfuerzos metodológicos realizados durante décadas por construir una ciencia del comportamiento con garantías de cientificidad a menudo ha ido acompañada del uso de *modelos estadísticos*. En este sentido, es un hecho ampliamente aceptado que modelos estadísticos como el análisis de la varianza, el análisis de regresión o el análisis de covarianza (por citar sólo algunos de los más representativos) han desempeñado un importantísimo papel en la teorización psicológica (vg. Cochran y Cox, 1978; Fisher, 1990; Kirk, 1968; Winner, 1962). Sin embargo, resulta curioso que

haya habido muy poco énfasis en el *modelo estructural matemático* subyacente a estos análisis, los cuales reflejan una concepción muy particular de cómo se originan los datos del fenómeno considerado.

Afortunadamente, durante estos últimos años parece que el panorama está empezando a variar y diversos obras metodológicas están reflejando este cambio de orientación (Judd y McClelland, 1989; Judd, McClelland y Culhane, 1995; Lunneborg, 1994, Maxwell y Delaney, 1984; etc.). Desde esta perspectiva las pruebas tradicionales de análisis estadístico (vg. ANOVA) no son contempladas meramente como pruebas de contraste de hipótesis sino más bien como grupos de ecuaciones matemáticas mediante las cuales modelizar el comportamiento del fenómeno estudiado. En este sentido el enfoque parte de la idea de que los datos pueden explicarse, en principio, con un número determinado de modelos, comenzando desde el modelo nulo (aquel que explica los datos simplemente como resultado de las fluctuaciones del azar $Y_{ijk} = m + e_{ijk}$) hasta llegar al modelo saturado (aquel que recoge el efecto de todas las variables manipuladas [y controladas] más sus correspondientes interacciones). Una consecuencia de este nuevo enfoque es la mayor atención prestada a los *parámetros* del modelo y, consecuentemente, una mayor comprensión del efecto de cada uno de los componentes o términos del modelo en la explicación del fenómeno.

Una característica en común que poseen todos estos modelos es la de ser *modelos lineales* y, consecuentemente, la de intentar explicar cada uno de los valores de la variable dependiente como resultado de la adición de una serie de efectos (incluyendo incluso, como una más, la propia interacción entre variables). No obstante, conviene señalar que durante estos últimos años la ciencia está sirviéndose también de instrumentos de *análisis no-lineal*. Su incidencia ha sido y sigue siendo muy importante en numerosas disciplinas, en especial a través de la teoría de las catástrofes (Thom, 1972) y algo más recientemente mediante la teoría del caos (Gleick, 1986; Mandelbrot, 1975). Sin embargo, su presencia en Psicología ha sido muy escasa, por no decir prácticamente nula, tal vez debido a la complejidad de los conocimientos matemáticos necesarios para su comprensión y aplicación (vg. topología). No obstante, a nuestro entender, el comportamiento humano es -en numerosos aspectos- eminentemente no-lineal, por lo que no sería de extrañar que en el futuro la naturaleza de los modelos matemáticos empleados para su descripción y explicación se transmutase desde la linealidad a la no-linealidad. En este sentido ya empieza a existir una bibliografía relativamente amplia (vg. De Leeuw, 1984; Gifi, 1991 y Meulman, 1988, entre otros); aunque algunos de los modelos etiquetados como algebraicos han sido, de hecho, modelos no-lineales precursores de las actuales tendencias.

¿QUÉ IDEAS SUBYACEN DETRÁS DE LA MODELIZACIÓN DEL COMPORTAMIENTO HUMANO?

Después de haber examinado las características principales de la clasificación presentada sobre modelos matemáticos en Psicología parece llegado el momento de exponer la idea central de este trabajo: resaltar las concepciones sobre el comportamiento humano que reflejan cada una de las "orientaciones modelizadoras".

En este sentido cabe afirmar que los modelos algebraicos responden a una visión muy clásica de la ciencia natural. Según ésta los procesos de la naturaleza -, co-

mo parte de ellos, los propios procesos psicológicos- siguen una serie de leyes, esas leyes son inmutables y potencialmente cognoscibles, así como expresables en el lenguaje universal de las matemáticas.

Por su parte, los modelos computacionales reflejan una concepción del ser humano como un sistema muy capacitado de procesamiento de información, de transformador de "inputs" sensoriales en "outputs" con significado gracias a una serie de operaciones de muy diversa naturaleza aplicadas sobre un elemento fundamental: la representación.

Finalmente, los modelos estadísticos dan una visión del comportamiento humano como una variable resultante de la acción conjunta de procesos determinísticos y procesos aleatorios. Por consiguiente, el esfuerzo de toda labor modelizadora aquí se focaliza en el descubrimiento de las variables explicativas del proceso determinístico y en la minimización y/o control de lo aleatorio que, en numerosas ocasiones, no es más que un modo de etiquetar nuestra abierta ignorancia sobre el efecto global de complejos patrones de interacción de otras muchas variables.

A MODO DE CONCLUSIÓN

Antes de finalizar quisiéramos realizar algunas matizaciones sobre las afirmaciones expuestas en este trabajo. La primera de ellas es que, pese a un cierto esfuerzo por presentar los modelos "agrupados" en una cierta temporalidad, somos plenamente conscientes de que la existencia de unos y otros sigue más bien un proceso acumulativo que estrictamente secuencial. El objetivo ha sido, por tanto, el señalar la preponderancia de unos sobre otros en determinados periodos históricos pero no su exclusividad. La segunda es que la clasificación presentada resulta compatible con muchas otras, en las que se habla de modelos descriptivos vs. normativos, dinámicos vs. estáticos, fenomenológicos vs. procesuales, etc. La tercera, y última, destacar que, por lo general, la labor de modelización matemática se ha centrado en procesos muy específicos y raramente ha intentado explicar fenómenos de considerable amplitud. Esto creemos que refleja asimismo una tendencia hacia el enfoque analítico de los procesos que tiene muchas virtudes, pero que puede convertirse en algo sumamente peligroso cuando se cae en la tentación de pensar que desde ahí puede darse una explicación completa y acabada de todos los fenómenos. La presencia de ciertas propiedades emergentes como resultado del comportamiento global de las partes es un hecho que no debería olvidarse, así como que todo modelo matemático debería mantenerse impregnado por "lo psicológico" pues eso es, en definitiva, lo que pretendemos explicar.

REFERENCIAS

- Anderson, J.R., y Bower, G.H. (1973). *Human associative memory*. Washington, DC: Winston.
- Atkinson, R.C., y Shiffrin, R.M. (1968). Human memory: A proposed system and its control 'processes'. In K.W. Spence & J.P. Spence (Ed). *The psychology of learning and motivation: Advances in research and theory* (pp. 89-105). New York: Academic Press.
- Attneave, F. (1959). *Applications of Information theory to psychology: A summary of basic concepts, methods, and results*. New York: Holt, Rinehart & Winston.
- Blackwell, H.R. (1963). Neural theories of simple visual discrimination. *Journal of the Optical Society of American*, 53, 129-160.

- Bush, R.R., y Mosteller, F. (1951). A mathematical model for simple learning. *Psychological Review*, 58, 313-323.
- Bush, R.R., y Mosteller, F. (1955). *Stochastic models for learning*. New York: Wiley.
- Cochran, W.G., y Cox, G.M. (1978). *Diseños experimentales*. México. Trillas.
- Cook, T.D., y Campbell, D.T. (1979). *Quasi-experimentation: Design and analysis issues for field settings*. Chicago: IL: Rand McNally.
- Coombs, C.H., Dawes, R.M. y Tversky, A. (1981) *Introducción a la psicología matemática*. Madrid: Alianza Universidad Textos (Edición original en inglés, 1970).
- De Leeuw, J. (1984). The Gifi-system of non-linear multivariate analysis. In E. Diday, M. Jambu, L. Lebart, J. Pages, and R. Tomassone (Eds.), *Recent developments in statistics*, Vol. III Amsterdam: North-Holland.
- Estes, W.K. (1993). Mathematical models in psychology. En G. Keren y Ch Lewis (Eds.), *Data analysis in the behavioral sciences* (pp. 3-199). Hillsdale, NJ: Erlbaum
- Estes, W.K. (1991) *Statistical models in behavioral research*. Hillsdale, N.J.: Erlbaum
- Feigenbaum, E. A. (1963). Simulation of verbal learning behavior. In E.A. Feigenbaum & J. Feldman (Eds.), *Computers and Thought* (pp. 297-309). New York: McGraw-Hill
- Fisher, R.A. (1990). *Statistical Methods. Experimental Design and Scientific Inference*. Oxford Oxford University Press
- Gifi, A. (1990). *Nonlinear multivariate analysis*. Chichester. John Wiley & Sons.
- Gleick, J. (1987). *Caos: la creación de una ciencia*. Barcelona: Seix Barral
- Green, D.M., y Swets, J. A. (1966) *Signal detection theory and psychophysics*. New York: John Wiley
- Hermes, H. (1969). Enumerability, Decidability, Computability. Madrid: Tecnos
- Hull, C.L. (1951) *Essentials of behavior*. New Haven: Yale University Press.
- Hunt, E.B. (1962). *Concept learning. An information processing problem*. New York: Yale University Press.
- Judd, C.M. y McClelland, G.H. (1989) *Data analysis: A model comparison approach*. San Diego. CA. Harcourt, Brace, Jovanovich.
- Judd, C.M., McClelland, G.H., y Culhane, S.E. (1995). Data analysis. Continuing issues in the everyday analysis of psychological data. *Annual Review Psychological*, 46, 433-465.
- Kirk, R. (1968). *Experimental design. procedures for the behavioral sciences*. Belmont, C.. Brooks-Cole.
- Krantz, D. H., Luce, R.D., Suppes, P.; & Tversky, A. (1971). *Foundations of measurement* (Vol. 1) New York. Academic Press.
- Laming, D. (1973). *Mathematical psychology*. New York: Academic Press.
- Luce, R. D. *Individual choice behavior: a theoretical analysis*. New York: Wiley.
- Lunneborg, C.E. (1994). *Modeling experimental and observational data*. California Duxbury Press.
- Mandelbrot, B. (1975). *Les objets fractals. Forme, hasard et dimension*. Paris: Ediscience.
- Marr, D. (1982). *Vision: A computational investigation into the human representation and processing of visual information*. San Francisco: W.H. Freeman.
- Maxwell, S.E., y Delaney, H.D. (1990). *Designing experiments and analyzing data: A model comparison perspective*. Belmont, C.A.. Wadsworth.
- Meulman, J.J. (1988). Nonlinear redundancy analysis via distances. In H.H. Bock (Ed.), *Classification and related methods of data analysis*, pp. 515-522. Amsterdam: North-Holland.
- Myers, A. K. (1982). Psychophy scaling and scales of physical measurement. *Psychological Bulletin*, 92 (1), 203-214.
- Newell, A. y Simon, H.A. (1963). Computers In psychology. En R.D. Luce, R. R. Bush y E. Galanter (Eds.), *Handbook of mathematical psychology*. New York. Wiley.
- Newell, A., Shaw, J.C., y Simon, H.A. (1958). Elements of a theory of human problem solving. *Psychological Review*, 65, 151-166.
- Newell, A., y Simon, H.A. (1972). *Human Problem Solving*. Englewood Cliffs, N.J. Prentice-Hall.
- Norman, D.A., y Rumelhart, D.E. (197). A system for perception and memory. In D. A. Norman (Ed.), *Models of human memory* (pp.21-64). New York: Academic Press.

- Pelegrina, M.(1988). Detección de señales en procesos perceptivos y cognitivos. En F. Salvador; M. Pelegrina, y M. Ruiz, *Nuevas perspectivas metodológicas en procesos perceptuales y cognición* (pp. 21-44). Barcelona: PPU.
- Posner, M. (1978). *The chronometry of mind*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Ponsoda, V. (1986). *Iniciación a la psicología matemática*. Madrid: Autor.
- Shannon, C.E.(1948). A mathematical theory of communication. *Bell System Technical Journal*, 27, 379-423, 623-656.
- Shepard, R.N.(1958). Stimulus and response generalization: Deduction on the generalization gradient from a trace model. *Psychological Review*, 65, 242-256.
- Spearman, C. (1904). "General intelligence" objectively determined and measured. *American Journal of Psychology*, 15, 201-293.
- Stevens, S.S. (1951). Mathematics, measurement, and psychophysics. En S.S. Stevens (Ed.), *Handbook of experimental psychology* (pp. 1-41). New York: Wiley.
- Stevens, S.S. (1975). *Psychophysics*. New York: John Wiley and Sons.
- Thom, R. (1972). *Stabilité structurelle et morphogénèse*. Paris: Ediscience.
- Thurstone, L.L. (1927). A law of comparative judgement. *Psychological Review*, 34, 373-286.
- Winner, B.J. (1962). *Statistical principles in experimental design*. New York: McGraw-Hill.